Université d'Ottawa **Paul Makdissi**
Département de science économique **Hiver 2011**

ECO3553 Théorie microéconomique III
Travail pratique #1

Problème 1.

a) **VRAI.**
$VC_{AB} = e(p^A, u^A) - e(p^B, u^A)$ et $VE_{BA} = e(p^B, u^A) - e(p^A, u^A)$, donc $VC_{AB} = -VE_{BA}$.

b) **VRAI.**
Lorsque le consommateur ne souffre pas d'illusion monétaire, la demande marshallienne pour le bien i est homogène de degré 0. En appliquant le théorème d'Euler à la demande marshallienne $x_i\,(p, m)$, on obtient

$$\sum_{j=1}^{L} p_j \frac{\partial x_i\,(p,m)}{\partial p_j} + m \frac{\partial x_i\,(p,m)}{\partial m} = 0.$$

En divisant les deux côtés par $x_i\,(p, m)$ on a

$$\sum_{j=1}^{L} \frac{p_j}{x_i\,(p,m)} \frac{\partial x_i\,(p,m)}{\partial p_j} + \frac{m}{x_i\,(p,m)} \frac{\partial x_i\,(p,m)}{\partial m} = 0,$$

$$\sum_{j=1}^{L} \varepsilon_{i,j} + \eta_i = 0.$$

Donc, si on connaît toutes les élasticités-prix, on peut calculer l'élasticité-revenu car $\eta_i = -\sum_{j=1}^{L} \varepsilon_{i,j}$.

c) **FAUX.**
Cette affirmation viole l'hypothèse de maximisation de l'utilité. Si le travailleur a choisit de travailler à faible revenu plutôt que de réclamer des prestations d'aide sociale, son niveau d'utilité est certainement au moins aussi élevé qu'en réclamant ces prestations.

d) **FAUX.**
En effet, pour un seul consommateur, il est impossible que tous les biens soient inférieurs car la condition d'agrégation d'Engel ne serait pas respectée:

$$\sum_{i=1}^{L} \alpha_i \eta_i < 0 \neq 1,$$

et il n'est pas possible non-plus que tous les biens soient des biens de luxe car:

$$\sum_{i=1}^{L} \alpha_i \eta_i > 1 \ \left(\sum_{i=1}^{L} \alpha_i = 1 \text{ et } \eta_i > 1 \ \forall i \right).$$

Problème 2.

a) La contrainte budgétaire du consommateur est $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \leq m$ et la loi de Walras implique que cela se traduit par $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = m$

b) Les préférences sont représentées par la fonction d'utilité Stone-Geary suivante: $U(x) = \prod_{i=1}^{n} (x_i - \gamma_\iota)^{\beta_i}$. Utilisons une transformation croissante de cette fonction d'utilité $W(x) = \log U(x) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \log(x_i - y_i)$. Le problème du consommateur devient alors

$$\max_x \sum_{i=1}^{n} \beta_i \log(x_i - y_i)$$

$$\text{sujet à } \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = m.$$

Le lagrangien de ce problème est

$$\max_{x,\lambda} L = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \log(x_i - y_i) + \lambda \left[m - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \right].$$

Les conditions de premier ordre de ce problème sont:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\beta_i}{x_i - \gamma_i} - p_i \lambda = 0 \quad i = 1 \text{ à } n, \tag{1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = m - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = 0. \tag{2}$$

De l'équation (1) on déduit que

$$x_i = \frac{\beta_i}{p_i \lambda} + \gamma_i \quad i = 1 \text{ à } n. \tag{1'}$$

Si on introduit (1') dans l'équation (2) on obtient

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\beta_i}{\lambda} + \gamma_i p_i \right) = m.$$

Comme $\sum_{i=1}^{n} \beta i = 1$, on a

$$\frac{1}{\lambda} + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i p_i = m,$$

$$\lambda = \frac{1}{m - \sum_{i=1}^{n} \gamma_i p_i}. \tag{3}$$

Enfin, en réintroduisant (3) dans (1') on obtient les fonction de demande marshalliennes

$$x_i(p,m) = \frac{\beta_i \left(m - \sum_{j=1}^{n} \gamma_j p_j \right)}{p_i} + \gamma_i. \tag{4}$$

c) Les demandes marshalliennes sont homogènes de degré 0 car

$$x_i(\alpha p, \alpha m) = \frac{\beta_i \left(\alpha m - \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \alpha p_j \right)}{\alpha p_i} + \gamma_i = \frac{\beta_i \left(m - \sum_{j=1}^{n} \gamma_j p_j \right)}{p_i} + \gamma_i = x_i(p,m).$$

d) Calculons les élasticités-revenu de ces demandes marshalliennes

$$\eta_i = \frac{m}{x_i} \frac{\partial x_i}{\partial m} = \frac{m}{x_i} \frac{\beta_i}{p_i}.$$

Vérifions la condition d'agrégation d'Engel

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \eta_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i x_i}{m} \frac{m}{x_i} \frac{\beta_i}{p_i} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i = 1.$$

La condition d'agrégation d'Engel est donc vérifiée.
Calculons maintenant les élasticités-prix:

$$\varepsilon_{i,j} = \frac{p_j}{x_i} \frac{\partial x_i}{\partial p_j} = -\frac{p_j}{x_i} \frac{\beta_i \gamma_j}{p_i} \quad \text{si } i \neq j,$$

$$\varepsilon_{j,j} = \frac{p_j}{x_j} \left(\frac{-\beta_j \gamma_j p_j - \beta_j \left(m - \sum_{k=1}^{n} \gamma_k p_k \right)}{p_j^2} \right) = \frac{p_j}{x_j} \left(\frac{-\beta_j \gamma_j - x_j + \gamma_i}{p_j} \right),$$

donc

$$\varepsilon_{j,j} = -\frac{p_j}{x_j} \frac{\beta_j \gamma_j}{p_j} - \frac{x_j - \gamma_j}{x_j}.$$

Vérifions la condition d'agrégation de Cournot:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varepsilon_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i x_i}{m} \left(\frac{-p_j}{x_i} \frac{\beta_i \gamma_j}{p_i} \right) - \frac{p_j x_j}{m} \frac{x_j - \gamma_j}{x_j},$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varepsilon_{i,j} = -\frac{p_j \gamma_j}{m} - \frac{p_j x_j}{m} + \frac{p_j \gamma_j}{m} = -\frac{p_j x_j}{m} = -\alpha_j.$$

La condition d'agrégation de Cournot est donc vérifiée.

e) Pour calculer $h_i(p,u)$, on doit d'abord calculer $e(p,u)$ et pour calculer $e(p,u)$, on doit d'abord calculer $v(p,m)$.

$$v(p,m) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\beta_i \left(m - \sum_{j=1}^{n} \gamma_j p_j \right)}{p_i} \right)^{\beta_i}.$$

Pour trouver $e(p,u)$, on remplace $v(p,m)$ par u et m par $e(p,u)$ dans l'équation précédente

$$u = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\beta_i \left(e(p,u) - \sum_{j=1}^{n} \gamma_j p_j \right)}{p_i} \right)^{\beta_i}.$$

L'objectif étant d'isoler $e(p,u)$ afin d'en trouver la valeur, on prend le log de l'expression ci-dessus

$$\log u = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \log \left(\frac{\beta_i \left(e(p,u) - \sum_{j=1}^{n} \gamma_j p_j \right)}{p_i} \right),$$

$$\log u = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \left[\log \beta_i + \log \left(e(p,u) - \sum_{j=1}^{n} \gamma_j p_j \right) - \log p_i \right],$$

$$\log u = \sum_{i=1}^{n} \log \left(\frac{\beta_i}{p_i} \right)^{\beta_i} + \log \left(e(p,u) - \sum_{i=1}^{n} \gamma_i p_i \right),$$

$$\log u - \log \left(e(p,u) - \sum_{i=1}^{n} \gamma_i p_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \log \left(\frac{\beta_i}{p_i} \right)^{\beta_i},$$

$$\log \frac{u}{e(p,u) - \sum_{i=1}^{n} \gamma_i p_i} = \sum_{i=1}^{n} \log \left(\frac{\beta_i}{p_i} \right)^{\beta_i},$$

$$\frac{u}{e(p,u) - \sum_{i=1}^{n} \gamma_i p_i} = e^{\sum_{i=1}^{n} \log \left(\frac{\beta_i}{p_i} \right)^{\beta_i}},$$

$$\frac{u}{e(p,u) - \sum_{i=1}^{n} \gamma_i p_i} = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\beta_i}{p_i} \right)^{\beta_i},$$

$$e(p,u) - \sum_{i=1}^{n} \gamma_i p_i = u \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{p_i}{\beta_i} \right)^{\beta_i},$$

$$e(p,u) = u \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{p_i}{\beta_i} \right)^{\beta_i} + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i p_i.$$

Maintenant on peut calculer la demande compensée à l'aide du lemme de Sheppard

$$h_i(p,u) = \frac{\partial e(p,u)}{\partial p_i} \quad i = 1 \text{ à } n,$$

$$h_i(p,u) = \frac{u\beta_i \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{p_k}{\beta k}\right)^{\beta_k}}{p_i} + \gamma_i \quad i = 1 \text{ à } n.$$

f) L'effet de substitution propre est donné par

$$\frac{\partial h_i(p,u)}{\partial p_i} = \frac{u\beta_i^2 \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{p_k}{\beta k}\right)^{\beta_k} - u\beta_i \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{p_k}{\beta k}\right)^{\beta_k}}{p_i^2},$$

$$\frac{\partial h_i(p,u)}{\partial p_i} = \frac{u\beta_i(\beta_i - 1) \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{p_k}{\beta k}\right)^{\beta_k}}{p_i^2}.$$

Comme $0 < \beta_i < 1$, $(\beta_i - 1) < 0$ et que d'autre part, toutes les autres composantes de l'expression sont positives, on peut donc conclure que l'effet de substitution propre est négatif c'est-à-dire

$$\frac{\partial h_i(p,u)}{\partial p_i} < 0.$$

g) Les effets de substitution croisés sont symétriques. En effet,

$$\frac{\partial h_i(p,u)}{\partial p_j} = u\frac{\beta_i}{p_j}\frac{\beta_j}{p_i}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{p_k}{\beta k}\right)^{\beta_k} = \frac{\partial h_j(p,u)}{\partial p_i}.$$

h) Aucun bien n'est inférieur car, étant donné que m, x_i, β_i et p_i sont positifs, l'élasticité-revenu (calculée en d) de tous les biens est positive:

$$\eta_i = \frac{m}{x_i}\frac{\beta_i}{p_i} > 0.$$

i) Aucun bien n'a de demande élastique car, étant donné que $0 < \gamma_i < x_i$ et $\beta_i < 1$, l'élasticité-prix propre (calculée en d) de chaque bien sera

$$\varepsilon_{ii} = -\frac{\beta_i\gamma_i}{x_i} - \frac{x_i - \gamma_i}{x_i} = \frac{\gamma_i}{x_i}(1 - \beta_i) - 1 \;\Rightarrow\; 0 < |\varepsilon_{ii}| < 1.$$

j) Nous pouvons vérifier les identités de Roy tout aussi bien avec la fonction d'utilité indirecte associée à $U(x)$ qu'avec celle associée à $W(x)$. Comme cela simplifie les manipulations algébriques, utilisons la fonction d'utilité indirecte associée à $W(x)$

$$v(p,m) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \log\left(\frac{\beta_i\left(m - \sum_{j=1}^{n}\gamma_j p_j\right)}{p_i}\right).$$

Les identités de Roy sont:

$$x_i(p,m) = \frac{-\partial v(p,m)/\partial p_i}{\partial v(p,m)/\partial m}.$$

Vérifions si elles sont respectées.

$$\frac{\partial v(p,m)}{\partial p_i} =$$

$$\sum_{j\neq i} \frac{\beta_j \left(\frac{-\beta_j\gamma_i}{p_j}\right)}{\frac{\beta_j}{p_j}\left(m-\sum_{k=1}^n \gamma_k p_k\right)} + \frac{\beta_i}{\frac{\beta_i}{p_i}\left(m-\sum_{k=1}^n \gamma_k p_k\right)} \left[\frac{-\beta_i\gamma_i p_i - \beta_i\left(m-\sum_{k=1}^n \gamma_k p_k\right)}{p_i^2}\right],$$

$$\frac{\partial v(p,m)}{\partial p_i} = \sum_{j\neq i} \frac{-\beta_j\gamma_i}{\left(m-\sum_{k=1}^n \gamma_k p_k\right)} - \frac{\beta_i\gamma_i}{\left(m-\sum_{k=1}^n \gamma_k p_k\right)} - \frac{\beta_i}{p_i},$$

$$\frac{\partial v(p,m)}{\partial p_i} = \sum_{j=1}^n \frac{-\beta_j\gamma_i}{\left(m-\sum_{k=1}^n \gamma_k p_k\right)} - \frac{\beta_i}{p_i},$$

$$\frac{\partial v(p,m)}{\partial p_i} = \frac{-\gamma_i}{\left(m-\sum_{k=1}^n \gamma_k p_k\right)} - \frac{\beta_i}{p_i}.$$

$$\frac{\partial v(p,m)}{\partial m} = \sum_{i=1}^n \frac{\beta_j \left(\frac{\beta_j\gamma_i}{p_j}\right)}{\frac{\beta_j}{p_j}\left(m-\sum_{k=1}^n \gamma_k p_k\right)},$$

$$\frac{\partial v(p,m)}{\partial m} = \sum_{i=1}^n \frac{\beta_j}{\left(m-\sum_{k=1}^n \gamma_k p_k\right)},$$

$$\frac{\partial v(p,m)}{\partial m} = \frac{1}{\left(m-\sum_{k=1}^n \gamma_k p_k\right)}.$$

Nous pouvons maintenant vérifier les identités de Roy:

$$\frac{-\frac{\partial v(p,m)}{\partial p_i}}{\frac{\partial v(p,m)}{\partial m}} = \frac{\frac{\gamma_i}{\left(m-\sum_{k=1}^n \gamma_k p_k\right)} + \frac{\beta_i}{p_i}}{\frac{1}{\left(m-\sum_{k=1}^n \gamma_k p_k\right)}},$$

$$\frac{-\frac{\partial v(p,m)}{\partial p_i}}{\frac{\partial v(p,m)}{\partial m}} = \frac{\beta_i\left(m-\sum_{j=1}^n \gamma_i p_i\right)}{p_i} + \gamma_i = x_i(p,m).$$

Celles-ci sont donc vérifiées.

k) Vérifions l'homogénéité de la fonction de dépense en p.

$$e(\alpha p,u) = u\prod_{i=1}^n \left(\frac{\alpha p_i}{\beta_i}\right)^{\beta_i} + \sum_{i=1}^n \gamma_i\alpha p_i,$$

$$e(\alpha p,u) = u\alpha^{\sum_{i=1}^n \beta_i}\prod_{i=1}^n \left(\frac{p_i}{\beta_i}\right)^{\beta_i} + \alpha\sum_{j=1}^n \gamma_j p_j,$$

$$e(\alpha p,u) = \alpha\left(u\prod_{i=1}^n \left(\frac{p_i}{\beta_i}\right)^{\beta_i} + \sum_{j=1}^n \gamma_j p_j\right) = \alpha e(p,u).$$

La fonction de dépense est donc homogène de degré 1 en p.

Problème 3. Le problème du consommateur est

$$\max U(x,l)$$

$$\text{sujet à } x + wl = wk + a.$$

Le lagrangien de ce problème est

$$\max L = U(x,l) + \lambda\left[w(k-l) + a - x\right].$$

Les conditions de premier ordre sont

$$\frac{\partial L}{\partial x} = U_x - \lambda = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial l} = U_l - \lambda w = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = w(k-l) + a - x = 0.$$

Notons ici que la question est mal formulée... mea culpa (et merci à une de vos consoeur d'avoir attiré mon attention sur ceci). La question aurait fonctionné si le déterminant de la hessienne A aurait été positif... mais il est négatif. Alors on a la situation suivante. On veut savoir si le loisir est un bien normal lorsque l'offre de travail a une pente négative. Pour pouvoir y répondre, il faut faire de la statique comparative. Si on prend les différentielles totales des conditions de premier ordre, on obtient

$$\begin{pmatrix} U_{xx} & U_{xl} & -1 \\ U_{lx} & U_{xx} & -w \\ -1 & -w & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dl \\ d\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda dw \\ (l-k)\,dw - da \end{pmatrix},$$

qu'on notera pour alléger le texte

$$A \cdot B = C.$$

Les conditions de deuxième ordre du problème nous indique que le déterminant de la matrice hessienne bordée (A) ci-dessus est négatif. Le loisir sera un bien normal si $\eta_l = \frac{m}{l}\frac{\partial l}{\partial m} > 0$ où m, le revenu dépend de w et de a. D'autre part, on sait que si on a $\partial l/\partial w > 0$ et $\partial l/\partial a > 0$, on a alors nécessairement $\partial l/\partial m > 0$ et $\eta_l > 0$.

Du système d'équations ci-dessus, on peut tirer en utilisant la règle de Cramer que

$$\frac{\partial l}{\partial w} = \frac{(k-l)(-U_{xx}w + U_{lx}) - \lambda}{|A|}$$

et

$$\frac{\partial l}{\partial a} = \frac{(-U_{xx}w + U_{lx})}{|A|}.$$

Dans la donnée du problème on dit que la pente de la fonction d'offre de travail est négative, cela signifie que $\partial T/\partial w < 0$ où T est l'offre de travail. D'autre part on sait aussi que $T = k - l$. Cela implique que $\partial l/\partial w > 0$. Mais on peut avoir $\partial l/\partial w > 0$, et avoir $-U_{xx}w + U_{lx} < 0$. Ceci entraînerait à son tour que $\partial l/\partial a < 0$. À ce moment, on aurait que

$\partial l/\partial m > 0$ et $\eta_l > 0$. Le loisir PEUT DONC ÊTRE un bien normal dans cette situation... mais il ne l'est pas nécessairement.

Problème 4.

a) Afin de maximiser son utilité, Pierre doit maximiser son revenu dans une première étape. En effet, si on dérive la fonction d'utilité indirecte par rapport au revenu:

$$\frac{\partial V(p,m)}{\partial m} = \lambda > 0,$$

on remarque que le niveau maximal d'utilité qu'un consommateur peut atteindre augmente avec son revenu réel. Afin d'augmenter le plus possible son revenu réel, Pierre doit donc profiter de la possibilité d'arbitrage créée par les différences de prix sur les 4 îles afin de maximiser son revenu sur son parcours et par la suite, une fois arrivé à l'île 4, maximiser son utilité. Ainsi, sur l'île 1, il dépensera tout son budget dans l'achat du bien 2 car c'est le bien qui subit la plus grande augmentation (en %) lorsqu'on passe de l'île 1 à l'île 2. Il part donc de l'île 1 avec 6 unités du bien 2 et les revend sur l'île 2 pour un montant de 18. Sur l'île 2, il n'achète aucun bien car le prix de tous les biens diminuent en passant à la troisième île. Sur l'île 3, il achète 20 unités du bien 1 qu'il revendra sur l'île 4 pour un montant de 36. Enfin, sur l'île 4, il maximise son utilité. Le problème est

$$\max x_1 x_2 x_3$$

$$\text{sujet à } 1.8x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 36.$$

Comme on sait (voir vos notes de cours) que les fonctions de demande pour une fonction d'utilité Cobb-Douglas sont

$$x_i(p,m) = \frac{\alpha_i m}{p_i \sum_{j=1}^{n} \alpha_j},$$

et étant donné que $\alpha_i = 1$ pour les trois biens, ces fonctions de demandes sont

$$x_i(p,m) = \frac{m}{3p_i}.$$

La solution finale qui maximise l'utilité de Pierre est donc

$$x^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.67 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

b) On fait le même raisonnement qu'en a sauf qu'un fois arrivé à l'île 4 lors du premier tour, il achète 18 unités du bien 3 qu'il revend à l'île 1 pour 54. Sur l'île 1, il achète 27 unités du bien 2 qu'il revend à l'île 2 pour 81. Sur l'île 2, il n'achète rien. Sur l'île

3, il achète 90 unités du bien 1 qu'il revend à l'île 4 pour 162. Sur l'île 4, il maximise son utilité. Le problème est

$$\max x_1 x_2 x_3$$

$$\text{sujet à } 1.8x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 162.$$

La solution finale qui maximise l'utilité de Pierre est donc

$$x^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 18 \\ 27 \end{pmatrix}.$$