Taux d'escompte et générations futures
Concepts de base en théorie du capital

©Louis Hotte*

January 18, 2021

Contents

1 La valeur d'une obligation **2**
- 1.1 Une obligation à échéance d'un an 2
- 1.2 Une obligation à échéance de deux ans 4

2 La décision d'investir **5**
- 2.1 Un exemple simple à trois périodes 5
- 2.2 Comment classer divers projets d'investissement 6
- 2.3 Un projet d'investissement avec horizon infini 7

3 Arbitrage et décision de continuation **8**
- 3.1 Analyse en temps continu 10

4 Problèmes **10**

Nous présentons quelques concepts de base en *théorie du capital*. Malgré leur simplicité, ces concepts s'avèrent très utiles pour l'interprétation des conditions d'optimalité inter-temporelles dans l'usage des ressources naturelles. Le rôle du taux d'escompte et sa mécanique est introduit.

*University of Ottawa (`louis.hotte@uottawa.ca`)

1 La valeur d'une obligation

Une *obligation* est un instrument financier avec lequel l'*émetteur* promet d'effectuer des paiements futurs au *détenteur* en échange d'un paiement présent par le détenteur. Ceci permet donc à l'émetteur d'emprunter de l'argent au détenteur; le premier devient alors *débiteur* (emprunteur) et le second *créancier* (prêteur). Les paiements futurs peuvent prendre diverses formes; ils incluent habituellement des versements d'intérêt périodiques et un paiement final égal au montant initial emprunté, appelé *principal* ou *valeur nominale* (face value). La *date d'échéance* (maturity date) correspond à la date à laquelle le dernier paiement est versé.

En général, les obligations sont des actifs liquides, c'est-à-dire qu'ils peuvent être achetés et vendus librement avant leur date d'échéance. Le prix d'une obligation dépendra des paiements restants et différera de son prix initial.

1.1 Une obligation à échéance d'un an

Simplifions en considérant une obligation qui promet de payer \$100 dans un an sans aucun versement intermédiaire. Nous supposons l'absence de risque et d'inflation: la promesse de paiement sera respectée avec certitude et un dollar dépensé l'au prochain a le même pouvoir d'achat que celui dépensé aujourd'hui. Mais attention, cela ne veut pas dire qu'un dollar à percevoir demain vaut autant qu'un dollar perçu aujourd'hui! Tout dépendra du rendement des actifs financiers. Voyons pourquoi.

Soit $p_{s,t}$ le prix à l'an t d'une obligation qui vient à échéance à l'an $t+s$. (Dans ce qui suit, t réfère généralement à l'année en cours.) Ainsi, le prix en t de notre obligation venant à échéance dans un an est noté $p_{1,t}$ et son *rendement* (yield) s'exprime comme suit:

$$r_t = \frac{\$100 - p_{1,t}}{p_{1,t}}. \tag{1}$$

r_t s'interprête également comme le taux d'intérêt de l'an t. En effet, puisque l'acheteur de l'obligation prête le montant $p_{1,t}$ à l'émetteur, ce dernier se trouve à emprunter au taux r_t. Il faut donc bien garder à l'esprit ces deux manières de voir r_t: du point de vue de l'épargnant qui achète une obligation, r_t constitue le rendement sur son épargne; du point de vue de l'émetteur, r_t

est le taux d'intérêt sur l'emprunt des fonds, appelé aussi *coût du capital financier*.

Une autre manière de se représenter la relation (1) consiste à supposer qu'une obligation a un rendement r_t, de telle sorte que son prix actuel sera donné par

$$p_{1,t} = \frac{\$100}{1 + r_t}. \tag{2}$$

On remarque qu'à partir du moment où notre obligation offre un rendement positif, on a $p_{1,t} < \$100$. On dira dès lors qu'un dollar promis pour demain vaut moins qu'un dollar en poche aujourd'hui. En effet, si une obligation offre un rendement $r_t > 0$, on est indifférent entre recevoir \$100 l'an prochain ou bien recevoir $\$100/(1+r_t)$ maintenant. Il y a deux manière de s'en convaincre, selon qu'on veut effectuer une dépense aujourd'hui ou bien l'an prochain. Voyons cela.

Supposons qu'on promet de vous verser \$100 l'an prochain mais que vous devez effectuer une dépense maintenant. Vous pouvez dès lors emprunter le montant $\$100/(1 + r_t)$ maintenant, le dépenser tout de suite et ensuite utiliser le \$100 perçu l'an prochain pour rembourser votre dette. C'est donc pareil à recevoir le montant $\$100/(1 + r_t)$ aujourd'hui.

Supposons au contraire qu'on vous verse le montant $\$100/(1 + r_t)$ aujourd'hui mais que vous devez dépenser l'an prochain. Il vous suffit alors d'acheter pour $\$100/(1 + r_t)$ d'obligations au taux de rendement r_t, ce qui vous donnera \$100 l'an prochain. C'est donc pareil à recevoir \$100 l'an prochain.

C'est ainsi que $p_{1,t}$ représente l'équivalent en *valeur présente* (ou *valeur actualisée*) de \$100 à recevoir l'an prochain vu que le rendement sur un bon du trésor est de r_t. L'égalité (2) peut également s'exprimer comme suit:

$$p_{1,t}(1 + r_t) = \$100. \tag{3}$$

Cette égalité s'interprète comme une condition d'*absence d'arbitrage*.[1] Pour comprendre cela, supposons que vous avez le choix entre deux obligations: l'obligation A offre le rendement r_t alors que l'obligation B promet de verser

[1]En finance, l'arbitrage désigne une situation où un investisseur peuvent faire des profits "faciles", c'est-à-dire qui ne sont pas justifiés par des efforts ou des risques additionnels. Une telle situation ne peut persister si l'information est publique (non-privilégiée), ce que l'on suppose ici.

\$100 dans un an et coûte $p_{1,t}$ aujourd'hui. Si $p_{1,t}(1+r_t) > \$100$, l'émetteur B peut emprunter le montant $p_{1,t}$ pour l'investir dans les obligations A et générer un surplus *sans effort, ni risque.* En répétant cette opération 1 million de fois, notre investisseur deviendra immensément riche. Dans la réalité, étant donné que l'obligation A offre un rendement plus élevé, personne ne voudra acheter l'obligation B au prix $p_{1,t}$. L'émetteur de B sera contraint de réduire son prix s'il veut emprunter, ce qui rétablira l'égalité en (3). Le lecteur est invité à vérifier que le même type de raisonnement s'applique si l'inégalité précédente est inversée, conduisant cette fois-ci à une appréciation de $p_{1,t}$. Poursuivons maintenant avec le cas d'une obligation à échéance de plusieurs périodes.

1.2 Une obligation à échéance de deux ans

Supposons qu'une obligation promet de verser \$100 dans deux ans, sans autre versement intermédiaire. Son prix actuel est noté $p_{2,t}$ et vous désirez conserver l'obligation pendant un an seulement. Vous anticipez pouvoir revendre cette obligation au prix $p^e_{1,t+1}$ dans un an car il s'agira alors du prix au temps $t+1$ d'une obligation à échéance d'un an. (L'indice ^{e} représente le fait que le prix de l'obligation est un prix anticipé, pas encore observé.) Le passage du temps est illustré à la figure 1. On suppose que le rendement annuel sur les bons du trésor est constant dans le temps et égal à r.

Selon l'expression (2), on a $p^e_{1,t+1} = \$100/(1+r)$, soit le montant que les acheteurs voudront payer en $t+1$ pour une obligation à échéance d'un an. En appliquant une seconde fois l'expression (2) au temps t, on obtient

$$p_{2t} = \frac{p^e_{1,t+1}}{1+r} = \frac{\$100}{(1+r)^2}. \tag{4}$$

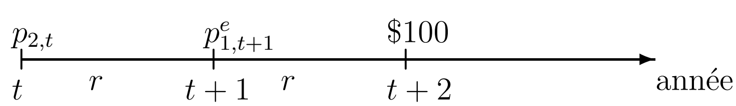

Figure 1: Une obligation à échéance de deux ans

De manière générale, si on applique le raisonnement précédent à une obligation qui promet de verser \$100 dans s années, sa valeur présente sera donnée par

$$p_{s,t} = \frac{\$100}{(1+r)^s}. \tag{5}$$

C'est ainsi qu'à partir du moment où on peut se procurer un actif qui offre un rendement strictement positif, un montant à percevoir dans le futur sera escompté à une valeur moindre aujourd'hui. Cet escompte s'applique même si le taux d'inflation est nul. Plus précisément, un dollar à recevoir l'an prochain vaut $\beta \equiv 1/(1+r)$ dollar aujourd'hui est c'est pour cette raison que r est appelé le *taux d'escompte.* β est quant à lui appelé le *facteur d'escompte.* Les deux variables sont bien sûr directement liées mais assurez-vous d'en bien faire la distinction. Et en ce qui nous concerne, vu que le taux d'escompte joue un rôle aussi important pour comparer les montants futurs et présents, il jouera un rôle crucial dans l'usage des ressources naturelles car les décisions prises aujourd'hui affectent les possibilités futures à travers leur impact sur l'état à venir des stocks de ressources.

2 La décision d'investir

2.1 Un exemple simple à trois périodes

Supposons que vous avez un projet en tête que seulement vous pouvez réaliser. Ce projet est unique, par exemple, parce qu'il requiert l'usage d'une ressource naturelle spécifique comme un gisement de pétrole sous-terrain sur lequel vous avez un droit exclusif.

Afin de réaliser le projet, vous devez bâtir un appareil de forage au coût I. I est un *investissement irrécupérable* (sunk cost) parce que l'appareil de forage est spécifique à votre gisement de pétrole; une fois bâti, il n'a plus aucune valeur de revente. On s'attend à ce que le projet génère les flux de profits nets suivants dans les trois prochaines années: π_1, π_2 and π_3. Après l'an 3, le puit ne produit plus rien et il est mis au rancart sans coût. On suppose que le projet ne comporte aucun risque; les profits sont connus avec certitude. Devriez-vous bâtir l'appareil de forage?

La réponse à cette question repose sur le *coût d'opportunité* du montant I à engloutir dans le projet. Autrement dit, on doit faire une comparaison avec le *meilleur usage alternatif* qu'on peut faire avec ce montant. Afin de simplifier, nous supposons que ce meilleur usage alternatif consiste à acheter des bons du trésor au rendement annuel r. Selon la méthode de la section 1.2, nous savons que la valeur présente des flux de profits futurs est donnée par

$$V_0 = \frac{\pi_1}{1+r} + \frac{\pi_2}{(1+r)^2} + \frac{\pi_3}{(1+r)^3}. \tag{6}$$

Il vaut la peine de réaliser le projet si $V_0 > I$ car cela indique que son rendement est plus élevé que celui offert par les bons du trésor. Pour bien voir cela, comparons les montants générés *en fin de vie* par les deux types d'investissement. Si le montant I est investi dans des bons du trésor, sa valeur en période 3 sera $B_3 = (1+r)^3 I$. Si le montant est utilisé pour le projet, le montant généré en période 3 sera donné par $V_3 = \pi_1(1+r)^2 + \pi_2(1+r) + \pi_3$. (Nous supposons ici que les profits des périodes 1 et 2 sont réinvesti en bons du trésor, comme il se doit.) Le projet offre donc un rendement plus élevé que les bons si $V_3 > B_3$; la lectrice est encouragée à vérifier que cette inégalité est en effet équivalente à $V_0 > I$.

Nous avons supposé jusqu'ici que l'investisseur n'avait qu'un seul projet en tête. Dans la réalité, un investisseur doit souvent choisir entre plusieurs projets. La méthode que nous venons de développer peut être adaptée pour comparer divers projets d'investissement.

Résoudre le problème 1.

2.2 Comment classer divers projets d'investissement

Supposons que vous avez le choix entre n différents projets et que vous voulez les hiérarchiser sur une liste de projets prioritaires. En effet, vous avez assez de fonds pour réaliser plus d'un projet mais pas assez pour réaliser tous ceux qui offrent un rendement plus élevé que les bons du trésor. Le concept de valeur présente sera utile ici aussi.

Supposons que le projet i requiert le coût irrécupérable I_i et que la valeur présente des profits futurs prévus est donnée par V_{0i}. Les coûts et bénéfices sont toujours supposés connus avec certitude. On a donc n projets différents, $i \in \{1, 2, ..., n\}$, et chaque projet comporte ses valeurs propres I_i et V_{0i}. Par exemple, le projet 2 peut coûter $I_2 = \$50 million$ alors que le projet 5 ne coûte que $I_5 = \$200000$.

Les projets peuvent être classés en terme de leur *indice de rentabilité* V_{0i}/I_i. En effet, ce ratio correspond au bénéfice par dollar investi.[2] Il s'agit alors de choisir le sous-ensemble de projets avec les indices de rentabilité les plus élevés jusqu'à ce que le montant total à investir soit dépensé, ce qui en maximisera le rendement moyen.

2.3 Un projet d'investissement avec horizon infini

Considérons maintenant un projet pour lequel on anticipe un flux constant de profits π par unité de capital dans un futur indéfini, soit $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \pi_4 = ... \equiv \pi$. Une unité de capital coûte \$1. Nous supposons toujours un taux de rendement r sur les bons du trésor. En suivant la même procédure qu'avec notre projet d'investissement de trois périodes ci-haut, la valeur présente du projet s'exprime comme suit :

$$V_0 = \frac{\pi}{1+r} + \frac{\pi}{(1+r)^2} + \frac{\pi}{(1+r)^3} + \frac{\pi}{(1+r)^4} + ... \tag{7}$$

En multipliant les deux côtés par $1/(1+r)$, on a :

$$\frac{1}{1+r}V_0 = \frac{\pi}{(1+r)^2} + \frac{\pi}{(1+r)^3} + ... \tag{8}$$

En soustrayant l'expression (8) de (7) de chaque côté, on obtient :

$$\left(1 - \frac{1}{1+r}\right)V_0 = \frac{\pi}{1+r}. \tag{9}$$

En simplifiant, nous obtenons enfin :

$$V_0 = \frac{\pi}{r}. \tag{10}$$

L'expression (10) indique que la valeur présente du projet augmente avec le flux de profits futurs mais diminue avec le rendement des bons du trésor. Une unité additionnelle de capital sera construite seulement si V_0 est plus grand que son coût de \$1.

Résoudre les problèmes 4 et 5.

[2] Pour une application intéressante de l'indice de rentabilité utilisé pour comparer les différents "Objectifs du développement durable" de 2015 des Nations Unies, lire "The economics of optimism", *The Economist*, 24 janvier 2015.

3 Arbitrage et décision de continuation

Jusqu'à présent, nous avons considéré des situations où un investisseur doit décider de réaliser un projet ou non, ce qui correspond à la création d'un nouvel actif. Un autre type de problème auquel fait face un investisseur à tout moment consiste à choisir entre conserver un actif que l'on possède déjà ou bien de le vendre. Ce type de problème est particulièrement utile pour comprendre les décisions d'exploitation d'une ressource naturelle. Dans la foulée, nous distinguerons explicitement entre les concepts de gain en capital et de dividendes.

Supposons qu'au début de la période t, vous possédez une unité d'un actif. À toute période t, la décision de continuation se pose alors dans les termes suivants: *Douis-je m'en départir au début de la période t ou bien le conserver pour une année supplémentaire et m'en départir au début de la période* $t+1$*?* Si vous vendez l'actif maintenant, vous empocher le montant p_t que vous pouvez alors investir dans votre meilleur projet alternatif qui offre un rendement r. Si, au contraire, vous le conservez pour une période de plus, l'actif génère un bénéfice d_t pendant la période t et vous pouvez le vendre au prix p_{t+1} au début de la période suivante. On suppose que tous les prix, bénéfices et rendements sont connus avec certitude.

La question précédente se pose pour des actifs aussi différents qu'une maison, un lopin de terre agricole, une usine (scierie, manufacture de tabac, ...), un équipement (bétonnière, génératrice, métier à tisser, ...), valeur boursière ou brevet. À toute période t, une maison peut être vendue au prix p_t ou bien louée pendant la période t au coût d_t (net des coûts d'entretien) et ensuite vendue à la période $t+1$ au prix p_{t+1}. En ce qui concerne le lopin de terre agricole, p_t et p_{t+1} sont les prix de vente en t et $t+1$ respectivement et d_t provient des profits nets générés par les récoltes. Quant à la scierie, elle peut être vendue aux prix p_t ou p_{t+1} et produire un profit net d_t en l'an t pour ses services de conversion de troncs d'arbre en planches. Enfin, l'exemple classique est celui d'une action d'entreprise achetée en bourse, auquel cas p_t et p_{t+1} correspondent aux prix aux deux périodes et d_t est le dividende par action versé en l'an t. Par soucis de concret, imaginons le cas d'une bétonnière dans l'analyse qui suit.

On suppose que le meilleur investissment alternatif consiste à acheter des bons du trésor ou un certificat de dépôt bancaire dont le rendement annuel est r. Ceci implique que si on vend un actif, on peut en réinvestir le gain en t pour un rendement r.

Si vous décidez de conservez la bétonnière pour la période t et la vendez à la fin, vous aurez le montant $d_t + p_{t+1}$ en poche au début de la période $t + 1$. Si, au contraire, vous vendez la bétonnière au début de la période t et en investissez le montant au taux de rendement r, vous aurez $p_t(1 + r)$ en poche au début de la période $t + 1$. Vous choisirez bien sûr l'alternative qui génère le plus haut montant en $t + 1$. Mais si on suppose que les deux types d'actifs sont détenus simultanément dans l'économie, soit par vous, soit par les investisseurs en général qui possèdent la même information sur les prix et les rendements, alors on peut argumenter que les investisseurs doivent être indifférents entre détenir un actif ou l'autre pendant la période t. C'est ce qu'on appelle la *condition d'absence d'arbitrage* qui s'écrit comme suit:

$$p_{t+1} + d_t = p_t(1 + r). \tag{11}$$

Une bonne manière de comprendre pourquoi l'égalité (11) doit tenir à l'équilibre consiste à supposer qu'elle ne tient pas. Prenons le cas $p_{t+1} + d_t > p_t(1 + r)$. Ainsi, les bétonnières offrent un rendement plus élevé que les obligations. Si c'est le cas, aucun investisseurs ne voudra se départir de sa bétonnière au prix p_t. (On suppose que les valeurs p_{t+1}, d_t et r sont fixes.) Et d'autre part, tous les détenteurs de bons vondront vendre pour acheter des bétonnières. Une telle situation fera en sorte que le prix actuel des bétonnières devra augmenter. p_t ne peut donc pas être un prix d'équilibre; il augmentera jusqu'à ce que la condition d'absence d'arbitrage soit rétablie.

Vu autrement, la *volonté à payer* d'un détenteur de bons pour une bétonnière au début de la période t est donnée par

$$p_t = \frac{p_{t+1} + d_t}{1 + r}. \tag{12}$$

On note que ce prix correspond à la valeur présente des paiements futurs provenant de la bétonnière. Si les deux types d'actifs sont détenus simultanément par les investisseurs, leurs rendements doivent être égaux.

Il est aussi instructif de se représenter l'égalité (12) comme suit:

$$\frac{(p_{t+1} - p_t) + d_t}{p_t} = r. \tag{13}$$

En théorie financière, la partie de gauche correspond à ce qu'on appelle le *taux de rendement interne* d'un projet. Dans le cas présent, le projet consiste simplement à conserver l'actif pour une année de plus. En effet, puisque l'actif pourrait être vendu au prix p_t, cela revient à investir le montant p_t, d'où le fait qu'il apparait au dénominateur. Le numérateur, quant à lui, correspond aux gains nets qui découlent de cet investissement. Ces gains se décomposent en deux parties: un *gain en capital* $p_{t+1} - p_t$ et un dividende d_t. La condition d'absence d'arbitrage impose que le taux de rendement interne soit égal au coût d'opportunité du capital financier, soit le taux de rendement sur les bons du trésor.

Lorsque nous analyserons des problèmes d'usage inter-temporel de ressources naturelles, nous référerons souvent à cette condition d'absence d'arbitrage en prenant en compte ses quatres composantes, soit le gain en capital, le dividende, le capital investi et le coût d'opportunité du capital. Cette simple formulation s'avère très efficace pour bien visualiser la prise de décision dans un contexte de dynamique stock-flux.

Résoudre les problèmes 2 et 3.

3.1 Analyse en temps continu

Jusqu'à présent, nos problèmes d'investissement portaient sur des périodes discrètes. Il sera parfois utile de travailler avec l'équivalent en temps continu. À cette fin, on suppose que $p(t)$, $d(t)$ et r représentent les valeurs *instantanées* des prix, flux de dividendes et taux d'intérêt. La condition d'absence d'arbitrage (13) s'écrit comme suit:

$$\frac{\dot{p}(t) + d(t)}{p(t)} = r, \tag{14}$$

où $\dot{p}(t) \equiv dp(t)/dt$ représente le taux de variation instantané du prix de l'actif, ou gain en capital.

4 Problèmes

Problème 1 ***Valeur présente et décision d'investissement*** *Vous considérez bâtir un appareil de forage pour extraire du pétrole. Le tableau suivant donne les profits nets que le puit générera au début de chaque période future avec certitude. Le taux d'intérêt annuel sur les bons du trésor est* $r = 3\%$. *Il n'y a pas d'inflation et le puit cesse ses opérations après quatre ans, sans coût additionnel, ni valeur de revente.*

	π_1	π_2	π_3	π_4
Profit net anticipé	*100*	*150*	*200*	*200*

a) *Supposons que le coût de construction du puit est $I = 500$. L'investissement est-il rentable?*

b) *Quel est l'indice de rentabilité du projet?*

c) *Supposons maintenant que le rendement sur les bons du trésor est $r = 15\%$. L'investissement est-il toujours rentable? Quel est son indice de rentabilité? Interprétez.*

d) *Calculez le taux d'escompte* critique*, c'est-à-dire celui qui correspond à un indice de rentabilité de 1. (Vous pouvez procéder par tâtonnement.)*

Problème 2 ***Taux de rendement et taux d'intérêt*** *Supposons qu'une bétonnière ne peut être détenue que pour une seule période. Ainsi, à toute période t, une investisseuse peut acheter une bétonnière au prix p_t mais elle doit la vendre au prix p_{t+1} au début de la période $t + 1$. L'investisseuse n'a cependant aucune épargne personnelle à investir. Afin d'acheter la bétonnière, elle doit emprunter l'entièreté du montant p_t au taux d'intérêt r et en rembourser les principal et intérêt au début de la période $t + 1$. (Les bons du trésor ne jouent pas de rôle direct ici.) Une bétonnière génère un bénéfice d_t en t et les valeurs p_{t+1}, d_t et r sont considérées comme données au début de t.*

a) *Argumentez que la même condition d'absence d'arbitrage (11) doit tenir à l'équilibre.*

b) *Soir r le taux d'intérêt sur les prêts et le taux de rendement des obligations. Du point de vue de la décision d'investir dans un projet, y a-t-il une distinction à faire entre avoir ses propres fonds ou devoir les emprunter? Expliquez ce que r représente réellement pour toute investisseuse.*

c) *Analysez séparément les effets d'une hausse de p_{t+1}, d_t et r sur p_t. Interprétez.*

Problème 3 ***Évolution du prix d'un actif*** *En vous basant sur l'équation (13), dîtes comment le prix d'un actif doit évoluer lorsque $d_t = 0$, $d_t < rp_t$ et $d_t > rp_t$.*

Problème 4 ***Un problème d'investissement avec dépréciation*** *Reprenons le problème d'investissement à horizon infini de la section 2.3 en tenant compte du fait qu'à chaque année, une proportion $\delta \in (0,1)$ du stock de capital devient inutilisable dû à la détérioration. On dira que le capital se déprécie au taux δ. À chaque période, le profit* par unité *de capital reste constant et égal à π. Ce qui change, c'est que la taille du stock de capital rétrécit avec le temps. Ainsi, alors qu'une unité de capital en t génère un profit π, cette même unité générera un profit de $(1-\delta)\pi$ en $t+1$ car sa taille sera alors de $(1-\delta)$. Et en $t+2$, elle générera un profit de $(1-\delta)^2\pi$, et ainsi de suite. Déterminez la valeur présente d'une unité de capital dans ce cas. Interprétez.*

Problème 5 ***Un problème d'investissement avec menace d'expropriation*** *On reprend le problème d'investissement à horizon infini de la section 2.3 mais en y introduisant des droits de propriété incertains. On suppose que la propriété de l'actif est contestable, de telle sorte que son propriétaire (l'investisseur) fait face à une probabilité d'expropriation en toute période. Ainsi, à la fin de chaque période t, il y a une probabilité $\theta \in (0,1)$ que le propriétaire se voit exproprié, perdant du coup accès à tout profit subséquent. On suppose toujours que le profit par unité de capital par période est de π. Déterminez la valeur présente d'une unité de capital dans ce cas. Interprétez.*