0.1 Extraction d'une ressource non-renouvelable sur deux périodes

Soit un problème à deux périodes concernant l'extraction d'une ressource non renouvelable. Pour être plus concret, supposons qu'il s'agit d'un gisement de pétrole sous-terrain.

La taille initiale du stock de la ressource est notée S_0, disons en nombre de barils de pétrole. On peut l'extraire entre deux périodes seulement, soit $t = 0$ et $t = 1$. Le prix de vente d'un baril de pétrole est constant et noté p. Le coût d'extraction par période dépend du taux d'extraction seulement; il est représenté par la fonction $C(R_t)$, où R_t est le niveau d'extraction à la période t et la fonction C est croissante et convexe, soit $C' > 0$ et $C'' > 0$. On suppose que les gains futurs sont escomptés au taux r par périodes, ce qui correspond au facteur d'escompte $\beta = 1/(1 + r)$. Ainsi, le problème de maximisation de la valeur présente s'exprime comme suit:

$$\underset{R_0,R_1}{max}\; V_0 = pR_0 - C(R_0) + \beta[pR_1 - C(R_1)] \tag{1}$$

$$s.t.\; R_0 + R_1 \leq S_0, \tag{2}$$

où l'inégalité (2) représente la *contrainte de la resource* car elle impose qu'on ne peut extraire plus que le stock initial contenu dans le gisement. Nous supposerons pour l'instant que cette contrainte est *serrante*, c'est-à-dire qu'elle est respectée avec égalité, ce que nous devrons vérifier plus bas.

En substituant $R_1 = S_0 - R_0$ dans la fonction objectif et en maximisant ainsi par rapport à R_0 seulement, nous obtenons la condition de premier ordre suivante:

$$\frac{\partial V_0}{\partial R_0} = p - C'(R_0^*) - \beta[p - C'(R_1^*)] = 0 \tag{3}$$

Cette expression indique qu'à l'optimum, l'effet sur la valeur présente V_0 du dernier baril extrait doit s'égaliser entre les deux périodes. Pour mieux visualiser cela, considérons que cela ne soit pas le cas. Par exemple, avec $p - C'(R_0) > \beta[p - C'(R_1)]$, la valeur de V_0 peut être augmentée en extrayant un baril supplémentaire à la période 0 même si, la contrainte étant serrante, cela force une réduction d'extraction de un baril à la période 1; il ne peut donc s'agir d'un optimum. Et inversement si l'inégalité va dans l'autre sens.

Ce résultat est illustré à la figure 1, où la longueur de l'abscisse est égale au stock initial de la ressource S_0 et les origines des taux d'extraction R_0 et R_1 sont indiqués par 0_0 et 0_1 respectivement. Tout point sur l'abscisse respecte donc la contrainte $R_0+R_1=S_0$. Les courbes représentent les rentes marginales exprimées en valeurs présentes et elles sont égalisées au point A.

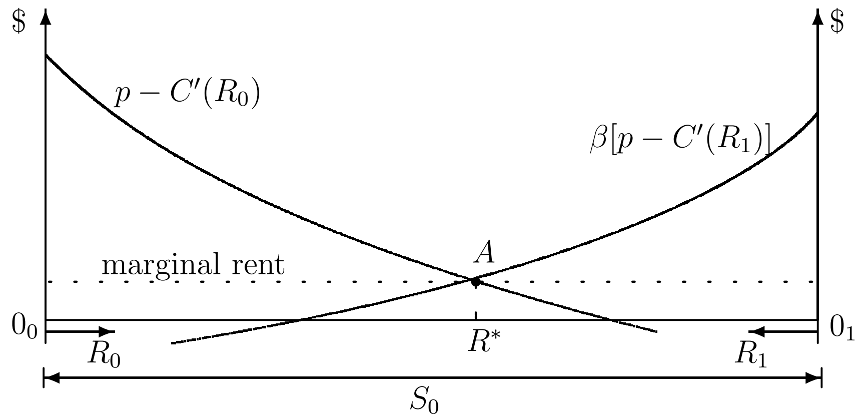

Figure 1: Extraction sur deux périodes d'une ressource non-renouvelable

La valeur $p-C'(R_t)$, correspondant au gain généré par le dernier baril extrait à chaque période, est appelée *rente marginale*. La condition d'optimalité (3) requiert que les valeurs actualisées des rentes marginales s'égalisent entre les périodes. La valeur de cette rente marginale nous permet de vérifier si la contrainte de la ressource est bel et bien serrante. Une manière de poser la question serait dans les termes suivants: Si la taille du stock initial augmentait de un baril à la marge, voudrait-on l'extraire? Si la réponse est oui, cela indique nécessairement que la contrainte est serrante; ce sera effectivement le cas si les rentes marginales sont positives. En effet, si on ajoute un baril au stock initial et qu'on l'extrait à la période t, le profit courant augmentera de $p - C'(R_t)$.

Une autre manière utile de réfléchir à la rente marginale consiste à définir la *fonction de valeur* $V_0^*(S_0)$ comme la valeur maximale que prendra V_0 au vu de la taille initiale du gisement S_0. Cette valeur est unique car elle dépend des choix spécifiques R_0^* et R_1^*, qui eux-mêmes dépendent de S_0 par le truchement de la contrainte. Il s'avère qu'une hausse du stock initial d'une unité à la marge haussera $V_0^*(S_0)$ de la valeur actualisée de la rente marginale, soit:

$$\frac{\partial V_0^*}{\partial S_0} = p - C'(R_0^*) = \beta[p - C'(R_1^*)]. \tag{4}$$

En effet, les valeurs actualisées des rentes marginales étant égalisées à l'optimum, on peut choisir d'extraire le baril additionnel en période 0 ou 1, l'effet sur V_0^* sera toujours le même. Ainsi, la valeur actualisée de la rente marginale correspond à la valeur d'un baril additionnel dans le stock initial. Si cette valeur est positive, la contrainte de ressource doit être serrante; on dira alors que la ressource est rare.

On note qu'avec une rente marginale positive, on a, à l'optimum, $p > C'(R_t^*)$. Ce résultat peut paraitre contredire la condition usuelle d'optimalité qui dicte l'égalité entre le prix et le coût marginal. Cela s'explique par le fait que lorsque la contrainte de ressource est serrante, le coût d'opportunité d'extraire un baril additionnel en $t = 0$ doit inclure la perte due au fait qu'il ne pourra plus être extrait en $t = 1$. Par conséquent, le vrai coût marginal d'extraction à la période 0 est égal à $C'(R_0) + \beta[p - C'(R_1)]$; on note alors que la condition d'optimalité égalise bien le prix avec ce coût marginal.