TRAVAILLER AVEC DES TAUX DE CROISSANCE

1 Les taux de croissance

Supposons que nous voulions analyser comment une certaine mesure varie dans le temps. Cette mesure peut être le revenu annuel per capita au Canada, la taille de la population, le taux de mortalité annuel, le nombre de sans-emplois, etc. De manière générale, cette mesure est appelée la variable X.

Puisque X varie dans le temps, nous devons prendre en compte ce fait. Nous le faisons en ajoutant l'indice t à la variable X, que nous représentons comme suit: X_t. Par exemple, si X représente le revenu annuel per capita, nous devons spécifier les années. Le revenu annuel per capita de l'année 2000 sera représenté par X_{2000}, celui de l'année 2001 sera X_{2001}, et ainsi de suite. Pour demeurer plus général, la première année est appelée l'année t. L'année suivante est alors l'année $t+1$, suivie de $t+2$, puis $t+3$, et ainsi de suite.

Le taux de croissance entre les deux années t et $t+1$ est défini comme son accroissement divisé par sa valeur initiale, c'est-à-dire:

$$\frac{X_{t+1} - X_t}{X_t}.$$

De manière similaire, le taux de croissance entre l'année $t+1$ et $t+2$ est égal à

$$\frac{X_{t+2} - X_{t+1}}{X_{t+1}}.$$

Et celui entre l'année $t+11$ et $t+12$ est égal à

$$\frac{X_{t+12} - X_{t+11}}{X_{t+11}}.$$

Pour simplifier, nous utilisons la lettre g pour référer au taux de croissance d'une variable. Ainsi,

$$g = \frac{X_{t+1} - X_t}{X_t} \tag{1}$$

Par exemple, si $X_t = 100$ et $X_{t+1} = 105$, nous avons

$$g = \frac{105 - 100}{100} = \frac{5}{100} = 0,05 = 5\%.$$

Notons que si la croissance variait dans le temps, il faudrait aussi ajouter l'indice t à g, c'est-à-dire g_t. Nous le faisons pas ici car nous n'allons considérer que des taux de croissance moyen, comme s'ils étaient constants dans le temps.

2 Calcul du taux de croissance moyen entre plusieurs annés

Avec quelques manipulations algébriques simples, l'équation (1) peut être réécrite comme suit:

$$X_{t+1} = X_t(1+g).$$

En supposant un taux de croissance constant dans le temps, nous avons

$$X_{t+2} = X_{t+1}(1+g) = (X_t(1+g))(1+g) = X_t(1+g)^2.$$

Et de manière générale, si X croît de g pendant n années, nous avons

$$X_{t+n} = X_t(1+g)^n. \tag{2}$$

Cette équation est utile, entre autre, pour extrapoler des revenus présents en revenus futurs, en supposant un taux de croissance constant du revenu. Estimons, par exemple, quel sera le revenu per capita des Américains en supposant qu'il continue à croître au même taux moyen que celui des 130 dernières années, c'est-à-dire 1,9% par an. Le revenu per capita actuel de 2000 étant de 35 000 $/an, nous avons

$$X_{2100} = X_{2000}(1+g)^{100} = 35000(1,019)^{100} = 35000 * 6,57 = 229872.$$

Si la tendance des 130 dernières années se maintient, l'Américain moyen de 2100 sera aussi riche qu'un médecin moyen d'aujourd'hui!

Si l'on connaît X_t et X_{t+n}, l'équation 2 nous permet de calculer aisément le taux de croissance moyen entre t et $t+n$. Il s'agit simplement d'isoler g dans l'équation précédente. Voici comment:

$$\frac{X_{t+n}}{X_t} = (1+g)^n \Rightarrow 1+g = \left(\frac{X_{t+n}}{X_t}\right)^{\frac{1}{n}} \Rightarrow g = \left(\frac{X_{t+n}}{X_t}\right)^{\frac{1}{n}} - 1.$$

C'est avec cette équation qu'on a calculé que le taux de croissance moyen aux États-Unis entre 1870 et 2000 fut de 1,9%, car nous avions $X_{1870} = 3500\$$ (environ), $X_{2000} = 35000\$$ (environ), et $n = 130$. Voici un autre exemple. Si le revenu passe de 100 à 200 en vingt ans, on a

$$g = \left(\frac{200}{100}\right)^{\frac{1}{20}} - 1 = 2^{\frac{1}{20}} - 1 = 1,035 - 1 = 0,035 = 3,5\%.$$

3 Les échelles de ratio (ou logarithmiques)

Lorsque l'on travaille avec des données temporelles caractérisées par un certain taux de croissance, l'usage d'une échelle ratio peut nous aider à mieux voir ce qui se passe.

Avec une échelle de ratio en ordonnée, *les mêmes proportions correspondent aux mêmes distances*. La distance entre 1 et 10 sera donc la même que la distance entre 10 et 100. Également, la distance entre 200 et 400 sera la même que la distance entre 400 et 800 et la distance entre 3000 et 6000. Une variable qui croît à un taux constant dans le temps donnera dès lors une droite. En effet, par définition, un taux de croissance constant dans le temps implique que la variable augmente toujours de la même proportion à l'intérieur d'un même intervalle de temps.

4 La règle de 72

C'est une formule qui nous permet d'approximer simplement le temps nécessaire pour que la valeur d'une variable double, en supposant un taux de croissance constant. Il s'agit simplement de diviser 72 par la valeur du taux de croissance exprimée en pourcentage. Par exemple, si le taux de croissance annuel du revenu est de 2% l'an, il doublera tous les $72/2 = 36$ ans.