SOLUTIONS CHAP 3 (PROBLÈMES 1 à 4)

1. À l'état stationnaire, le stock de capital per capita doit demeurer constant dans le temps. Ainsi, l'investissement en capital ne fait que compenser pour la dépréciation du capital. (NB Il n'y a pas de croissance de population ici.) Si la fraction de l'output investie est donnée par γ, alors l'investissement est de $\gamma y = \gamma k^{\frac{1}{2}}$. Si le capital se déprécie au taux δ, la quantité de capital à l'état stationnaire ($\tilde{k}$) sera définie par l'égalité suivante:

$$\gamma \tilde{k}^{\frac{1}{2}} = \delta \tilde{k}.$$

Puisque $\gamma = 0.5$, et $\delta = 0.05$, on obtient $\tilde{k} = 10^2 = 100$. Le stock de capital actuel de 400 excède donc celui de l'état stationnaire. Ce stock devra donc diminuer. Ceci se vérifie en calculant la valeur du taux de variation du capital, Δk,

$$\Delta k = \gamma k^{\frac{1}{2}} - \delta k = 0.5 * (400)^{\frac{1}{2}} - 0.05 * 400 = -10 < 0.$$

Elle est négative. Ainsi, la dépréciation excède l'investissement lorsque $k = 400$.

2. Un exemple en biologie est celui de la croissance de la population d'une espèce animale, par exemple le nombre de chevreuils sur l'île d'Anticosti. Le nombre de chevreuils est limité par la quantité de nopuriture disponible sur l'île. Si le nombre de chevreuil est très bas, leur population croîtra rapidement car il y a relativement beaucoup de nourriture disponible. C-à-d que le nombre de naissance excèdera le nombre de décès. Inversement, si leur nombre est très élevé, il y aura trop peu de nourriture disponible et leur nombre devra diminuer; le nombre de décès excèdera le nombre de naissances. Entre ces deux extrêmes, il existe un nombre de chevreuils qui trouvera juste assez de nourriture pour supporter ce nombre, mais pas assez pour l'augmenter; le nombre de naissances est égal au nombre de décès.

3. En supposant une fonction d'output per capita de forme Cobb-Douglas, c-à-d $y = Ak^{\alpha}$, on a, à l'équilibre stationnaire,

$$\gamma A k^{\alpha} = \delta k.$$

La quantité de capital à l'équilibre stationnaire est donc

$$\tilde{k} = \left(\frac{\gamma A}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

En insérant cette valeur de k dans la fonction d'output, on obtient l'output à l'état stationnaire suivant:

$$\tilde{y} = A\tilde{k}^{\alpha} = A^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}.$$

Si deux pays ne différent que de par leur taux d'investissement, on a

$$\frac{\tilde{y}_i}{\tilde{y}_j} = \frac{A^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{\gamma_i}{\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}{A^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{\gamma_j}{\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} = \left(\frac{\gamma_i}{\gamma_j}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = \left(\frac{0.05}{0.2}\right)^{\frac{1/3}{1-1/3}} = 0.5.$$

À long terme, c-à-d à l'état stationnaire, le revenu dans le pays i sera deux fois plus élevé que celui du pays j parce que ce dernier épargne à un taux quatre fois plus faible.

Et si $\alpha = 2/3$, on a

$$\frac{\tilde{y}_i}{\tilde{y}_j} == \left(\frac{\gamma_i}{\gamma_j}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = \left(\frac{0.05}{0.2}\right)^{\frac{2/3}{1-2/3}} = 0.0625 = \frac{1}{16}.$$

À long terme, c-à-d à l'état stationnaire, le revenu dans le pays i sera maintenant seize fois plus élevé que celui du pays j parce que ce dernier épargne à un taux quatre fois plus faible.

4.a) En suivant la même procédure qu'au problème précédent, le modèle de Solow prédit

$$\frac{\tilde{y}_T}{\tilde{y}_B} = \left(\frac{\gamma_T}{\gamma_B}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = \left(\frac{0.294}{0.101}\right)^{\frac{1/3}{1-1/3}} = 1.706.$$

En réalité, le ratio des revenus per capita est de

$$\frac{12086}{7152} = 1.69,$$

ce qui est très proche de la prédiction du modèle de Solow.

4.b) Dans ce cas-ci, le modèle de Solow prédit

$$\frac{\tilde{y}_N}{\tilde{y}_T} = \left(\frac{\gamma_N}{\gamma_T}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = \left(\frac{0.075}{0.149}\right)^{\frac{1/3}{1-1/3}} = 0.71.$$

En réalité, le ratio des revenus per capita est de

$$\frac{1906}{15726} = 0.121,$$

ce qui est très loin de la prédiction du modèle de Solow.

4.c) Dans ce cas-ci, le modèle de Solow prédit

$$\frac{\tilde{y}_J}{\tilde{y}_N} = \left(\frac{\gamma_J}{\gamma_N}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = \left(\frac{0.311}{0.21}\right)^{\frac{1/3}{1-1/3}} = 1.217.$$

En réalité, le ratio des revenus per capita est de

$$\frac{69235}{40176} = 1.723,$$

ce qui est assez loin de la prédiction du modèle de Solow.