

1 Page 225, n° 5

On se donne l'application linéaire $A : V \rightarrow V$ définie par $A(v) = \langle v_0, v \rangle w_0$. Soit $\{u_1, \dots, u_n\}$ une base orthonormale de V . Alors

$$\begin{aligned} A^*(v) &= \langle v, A(u_1) \rangle u_1 + \dots + \langle v, A(u_n) \rangle u_n \\ &= \langle v, \langle v_0, u_1 \rangle w_0 \rangle u_1 + \dots + \langle v, \langle v_0, u_n \rangle w_0 \rangle u_n \\ &= \langle v, w_0 \rangle \langle v_0, u_1 \rangle u_1 + \dots + \langle v, w_0 \rangle \langle v_0, u_n \rangle u_n \\ &= \langle v, w_0 \rangle (\langle v_0, u_1 \rangle u_1 + \dots + \langle v_0, u_n \rangle u_n) \\ &= \langle v, w_0 \rangle v_0. \end{aligned}$$

2 Page 225, n° 7

Soit W un sous-espace de V . Soit $w \in W$. Pour tout $v \in W^\perp$, $\langle w, v \rangle = 0$, alors $w \in (W^\perp)^\perp$. Par conséquent, $W \subseteq W^{\perp\perp}$. Or, V est supposé de dimension finie, alors

$$\dim V = \dim W + \dim W^\perp$$

et

$$\dim V = \dim W^\perp + \dim W^{\perp\perp}.$$

Donc $\dim W = \dim W^{\perp\perp}$. Il s'ensuit que $W = W^{\perp\perp}$.

En conséquence, $\text{Im } {}^tA = (\text{Ker } A)^\perp$ s'équivaut à $(\text{Im } {}^tA)^\perp = (\text{Ker } A)^{\perp\perp} = \text{Ker } A$, ce qui est plus facile à montrer.

Supposons que $u \in (\text{Im } {}^tA)^\perp$, et soit $v \in V$. Alors

$$\langle A(u), v \rangle = \langle u, {}^tA(v) \rangle = 0.$$

Puisque le produit scalaire est non dégénéré, nous avons que $A(u) = O$. Donc $u \in \text{Ker } A$, d'où $(\text{Im } {}^tA)^\perp \subseteq \text{Ker } A$.

Réciproquement, supposons que $u \in \text{Ker } A$, et soit $v \in \text{Im } {}^tA$. Alors il existe $w \in V$ tel que $v = {}^tA(w)$. Donc

$$\langle u, v \rangle = \langle u, {}^tA(w) \rangle = \langle A(u), w \rangle = \langle O, w \rangle = 0.$$

Alors $u \in (\text{Im } {}^tA)^\perp$. Donc $\text{Ker } A \subseteq (\text{Im } {}^tA)^\perp$.

En conclusion, $\text{Ker } A = (\text{Im } {}^tA)^\perp$.

3 Page 234, n° 2

On a que $\langle A(v_i), A(v_i) \rangle = \langle v_i, v_i \rangle = 1$ et $\langle A(v_i), A(v_j) \rangle = \langle v_i, v_j \rangle = 0$ pour $i \neq j$, alors $\{A(v_1), \dots, A(v_n)\}$ est un ensemble orthonormal à $n = \dim V$ éléments, donc c'est une base orthonormale de V .

4 Page 180, n° 9

On a $\varphi(t) = \begin{vmatrix} f(t) & g(t) \\ f'(t) & g'(t) \end{vmatrix} = f(t)g'(t) - g(t)f'(t)$. Grace à la règle de Leibniz, on a

$$\varphi'(t) = f'(t)g'(t) + f(t)g''(t) - g'(t)f'(t) - g(t)f''(t) = \begin{vmatrix} f(t) & g(t) \\ f''(t) & g''(t) \end{vmatrix}.$$

5 Page 181, n° 10

On a défini

$$\varphi(t) = \text{Det}(B(t), C(t)) = b_1(t)c_2(t) - c_1(t)b_2(t).$$

Alors

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= b_1'(t)c_2(t) + b_1(t)c_2'(t) - c_1'(t)b_2(t) - c_1(t)b_2'(t) \\ &= (b_1'(t)c_2(t) - c_1(t)b_2'(t)) + (b_1(t)c_2'(t) - c_1'(t)b_2(t)) \\ &= \text{Det}(B'(t), C(t)) + \text{Det}(B(t), C'(t)). \end{aligned}$$