Formes différentielles

12/03/2008 (1)

~~Def~~

Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert.

Une k-forme (différentielle) sur U est une règle,

$$\begin{array}{ccc} p & \longmapsto & \omega(p) \\ \cap & & \cap \\ U & & \Lambda^k(\mathbb{R}^n_p) \end{array}$$

$((e_1)_p, \dots, (e_n)_p)$ base usuelle de $\mathbb{R}^n_p$

$(\varphi_i)(p)(v_p) = v^i$

$((\varphi_1)^{(p)}, \dots, (\varphi_n)^{(p)})$ base duale de $(\mathbb{R}^n_p)^* = \Lambda^1(\mathbb{R}^n_p)$

$\Rightarrow \{ \overset{(p)}{\varphi_{i_1}} \wedge \dots \wedge \overset{(p)}{\varphi_{i_k}} : 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n \}$ est une base de $\Lambda^k(\mathbb{R}^n_p)$

$$\Rightarrow \omega(p) = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1, \dots, i_k}(p) \cdot \varphi_{i_1}(p) \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k}(p)$$

$$\boxed{\omega_{i_1, \dots, i_k} : U \to \mathbb{R} \text{ est } C^\infty.}$$

Rang

Déf^{n} L'ensemble des k-formes sur U

est noté $\Omega^k(U)$.

$\Omega^0(U) = \{$toute fonction C^∞ $f : U \to \mathbb{R}\}$.

$\omega \in \Omega^k(U)$, $\eta \in \Omega^l(U) \Rightarrow \omega \wedge \eta \in \Omega^{k+l}(U)$

$$\begin{cases} (\omega \wedge \eta)(p) = \omega(p) \wedge \eta(p). \\ (f \wedge \eta)(p) = f(p)\eta(p). \end{cases}$$

Rappel $f : \overset{U\subseteq}{\mathbb{R}^n} \to \mathbb{R}$ C^∞.

$\forall p \in U$, $Df(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est l'application linéaire

avec matrice $f'(p)$ par rapport à la base

usuelle de $\mathbb{R}^n$.

En d'autres termes, si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$,

$$[Df(p)]_{\mathcal{B}} [v]_{\mathcal{B}} = \left[\frac{\partial f}{\partial x^1}(p), \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n}(p) \right] \begin{bmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{bmatrix}$$

$$= \left[\frac{\partial f}{\partial x^1}(p) v^1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^n}(p) v^n \right]$$

$$\boxed{\Rightarrow Df(p)(v) = \frac{\partial f}{\partial x^1}(p) \cdot v^1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^n}(p) \cdot v^n.}$$

En particulier, $Df(p) \in (\mathbb{R}^n)^* = \mathcal{T}^1(\mathbb{R}^n) = \Lambda^1(\mathbb{R}^n)$.

On définit $df \in \Omega^1(U)$, la *différentielle* de f, par

$$\boxed{df(p)(v_p) = Df(p)(v)} \quad \forall v_p \in \mathbb{R}^n_p.$$

Exemple important

$\pi^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\quad \pi^i(x^1, \dots, x^n) = x^i$.

π^i est *linéaire*.

~~Prop~~ Th.

Th. 4A Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est linéaire, alors $Df)(p) = f$ $\forall p \in \mathbb{R}^n$.

Dém $f(x^1,\dots,x^n)=a_1x^1+a_2x^2+\dots+a_nx^n$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x^i}=a_i \qquad \forall i\in\{1,\dots,n\}.$$

$$\Rightarrow (Df(p))(\cancel{x^1,\dots,x^n}\ v^1,\dots,v^n)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}(p)\cdot v^i$$

$$=\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot v^i$$

$$=f(v^1,\dots,v^n).$$

$\boxtimes$

Alors $(d\pi^i)(p)(v_p)=(D\pi^i(p))(v)$

$$=\pi^i(v)$$

$$=v^i \qquad \forall p\in U,\ v\in\mathbb{R}^n.$$

la fonction

$\underline{\text{Not}}^{\text{ion}}$ π^i est notée x^i — désolé !

dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$

$x^1, x^2, x^3 \longrightarrow x, y, z.$ $\qquad d\pi^i = dx^i$

$(dx^1(p), \dots, dx^n(p))$ est la base duale

à $((e_1)_p, \dots, (e_n)_p)$

(car $dx^i(p)(v_p) = v^i \} = \varphi_i(p)(v_p)$).

$\underline{\text{Alors}}$ $\omega \in \Omega^k(U)$

$$\Rightarrow \omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1, \dots, i_k} \, dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

$dy \wedge dx$ dans base std.

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ C^∞.

Alors

$$\{df\}(p)(w_p) = Df(p)(w)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \cdot w^i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \cdot dx^i(p)(w_p)$$

~~$\Rightarrow df =$~~

Th 4-7 Si $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est C^∞, alors

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^1} \cdot dx^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2} \cdot dx^2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x^n} dx^n.$$

Ex $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$

$$df = 2x e^{x^2+y^2} dx + 2y e^{x^2+y^2} dy.$$

$$\text{soit } f : \underset{\substack{\text{n° de colonnes} \\ \downarrow}}{}\mathbb{R}^n \longrightarrow \underset{\substack{\text{n° de lignes} \\ \downarrow}}{}\mathbb{R}^m \quad \cancel{\text{diff}}\ C^\infty.$$

matrice jacobienne :

$$f'(p) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial f^1}{\partial x^n} \\ & \ddots & \\ \dfrac{\partial f^m}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial f^m}{\partial x^n} \end{bmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ appl. linéaire $Df(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$\mathcal{B}_n = \{e_1, \dots, e_n\}$ $\quad v \in \mathbb{R}^n$

$\mathcal{B}_m = \{e_1, \dots, e_m\}$

$$[Df(p)(v)]_{\mathcal{B}_m} = f'(p) \cdot [v]_{\mathcal{B}_n}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1}(p) & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^m}{\partial x^1}(p) & \cdots & \frac{\partial f^m}{\partial x^n}(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n \frac{\partial f^1}{\partial x^j}(p) v^j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n \frac{\partial f^m}{\partial x^j}(p) v^j \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_m}$$

$$\Rightarrow Df(p)(v) = \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f^1}{\partial x^j}(p) v^j, \dots, \sum_{j=1}^n \frac{\partial f^m}{\partial x^j}(p) v^j \right)$$

Déf

$$f_*: \mathbb{R}^n_p \to \mathbb{R}^m_{f(p)}$$

$$f_*(w_p) = \left(Df(p)(w)\right)_{f(p)}$$

$$\rightsquigarrow \quad f^*: \Lambda^k(\mathbb{R}^m_{f(p)}) \to \Lambda^k(\mathbb{R}^n_p)$$

$$\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^m)$$

Déf $f^*\{\omega\} \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$

$$(f^*\omega)(p) = f^*(\underbrace{\omega(f(p))}_{\in \Lambda^k(\mathbb{R}^n_{f(p)})})\,.$$

Demain Comment faire des calculs!