MAT 2521 Devoir 5

à rendre le 10 avril

4-19 Soit F un champ vectoriel dans $\mathbf{R}^3$. On définit des formes $\omega_F^1 \in \Omega^1(\mathbf{R}^3)$ et $\omega_F^2 \in \Omega^2(\mathbf{R}^3)$ par

$$\omega_F^1 = F^1 dx + F^2 dy + F^3 dz$$

et

$$\omega_F^2 = F^1 dy \wedge dz + F^2 dz \wedge dx + F^3 dx \wedge dy.$$

Ici les $F^i : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ sont les fonctions composantes de F, $i = 1, 2, 3$.

(a) Montrer que

$$df = \omega^1_{\mathrm{grad}\, f}$$

(où $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ est une fonction C^∞),

$$d(\omega_F^1) = \omega^2_{\mathrm{curl}\, F},$$

et

$$d(\omega_F^2) = \mathrm{div}\, F\, dx \wedge dy \wedge dz.$$

(b) En utilisant la partie (a), montrer que

$$\mathrm{curl}\,\mathrm{grad}\, f = 0 = \mathrm{div}\,\mathrm{curl}\, F.$$

(c) Soit $A \subseteq \mathbf{R}^3$ un ouvert étoilé. Soit F un champ vectoriel sur A tel que $\mathrm{curl}\, F = 0$. Montrer qu'il existe une fonction $f : A \to \mathbf{R}$ telle que $F = \mathrm{grad}\, f$. De même façon, montrer que si $\mathrm{div}\, F = 0$, alors $F = \mathrm{curl}\, G$ pour un certain champs vectoriel G sur A.

4-23 Soient $R > 0$ et $n \in \mathbf{Z}$. On définit $c_{R,n} \in \mathcal{S}_1(\mathbf{R}^2 - \{0\})$ par $c_{R,n}(t) = (R\cos 2\pi nt, R\sin 2\pi nt)$. Montrer qu'il existe $c \in \mathcal{S}_2(\mathbf{R}^2 - \{0\})$ tel que $c_{R_1,n} - c_{R_2,n} = \partial c$, quelque soit $R_1, R_2 > 0$.

4-26 Soit $d\theta \in \Omega^1(\mathbf{R}^2 - \{0\})$ définie par

$$d\theta = \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy.$$

Montrer que $\int_{c_{R,n}} d\theta = 2\pi n$. Utiliser le théorème de Stokes pour conclure qu'il n'existe aucune $c \in \mathcal{C}_2(\mathbf{R}^2 - \{0\})$ telle que $\partial c = c_{R,n}$.