

# MAT 2521 Devoirs 5 Corrigé

J. Scott

**4-19** (*Remarque* : rot = curl.)

- (a) Par définition,  $df = (\partial f/\partial x)dx + (\partial f/\partial y)dy + (\partial f/\partial z)dz = \omega_{\text{grad } f}^1$ , car  $\text{grad } f = (\partial f/\partial x)(e_1)_p + (\partial f/\partial y)(e_2)_p + (\partial f/\partial z)(e_3)_p$ .

Ensuite,

$$\begin{aligned}
 d(\omega_F^1) &= (dF^1) \wedge dx + (dF^2) \wedge dy + (dF^3) \wedge dz \\
 &= \left( \frac{\partial F^1}{\partial x} dx + \frac{\partial F^1}{\partial y} dy + \frac{\partial F^1}{\partial z} dz \right) \wedge dx \\
 &\quad \left( \frac{\partial F^2}{\partial x} dx + \frac{\partial F^2}{\partial y} dy + \frac{\partial F^2}{\partial z} dz \right) \wedge dy \\
 &\quad \left( \frac{\partial F^3}{\partial x} dx + \frac{\partial F^3}{\partial y} dy + \frac{\partial F^3}{\partial z} dz \right) \wedge dz \\
 &= \frac{\partial F^1}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial F^1}{\partial z} dz \wedge dx + \frac{\partial F^2}{\partial x} dx \wedge dy \\
 &\quad + \frac{\partial F^2}{\partial z} dz \wedge dy + \frac{\partial F^3}{\partial x} dx \wedge dz + \frac{\partial F^3}{\partial y} dy \wedge dz \\
 &= \left( \frac{\partial F^3}{\partial y} - \frac{\partial F^2}{\partial z} \right) dy \wedge dz \\
 &\quad + \left( \frac{\partial F^1}{\partial z} - \frac{\partial F^3}{\partial x} \right) dz \wedge dx \\
 &\quad + \left( \frac{\partial F^2}{\partial x} - \frac{\partial F^1}{\partial y} \right) dx \wedge dy \\
 &= \omega_{\text{rot } F}^2.
 \end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
 d(\omega_F^2) &= dF^1 \wedge dy \wedge dz + dF^2 \wedge dz \wedge dx + dF^3 dx \wedge dy \\
 &= \frac{\partial F^1}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial F^2}{\partial y} dy \wedge dz \wedge dx + \frac{\partial F^3}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dy \\
 &= \text{div } F dx \wedge dy \wedge dz,
 \end{aligned}$$

car  $(dy \wedge dz) \wedge dx = (-1)^{2-1} dx \wedge (dy \wedge dz)$  et  $dz \wedge (dx \wedge dy) = (-1)^{1-2} (dx \wedge dy) \wedge dz$ .

- (b)  $\omega_{\text{rot grad } f}^2 = d(\omega_{\text{grad } f}^1) = d(df) = 0$  car  $d \circ d = 0$ . Alors  $\text{rot grad } f = 0$  ( $F \mapsto \omega_F^2$  est injective). De même façon,  $\text{div rot } F dx \wedge dy \wedge dz = d(\omega_{\text{rot } F}^2) = d(d\omega_F^1) = 0$ .

(c) Si  $\text{rot } F = 0$ , alors  $\omega_{\text{rot } F}^2 = 0$ . Donc  $d(\omega_F^1) = 0$ . Puisque  $A$  est étoilé, le lemme de Poincaré constate qu'il existe  $f \in \Omega^0(A)$  telle que  $df = \omega_F^1$ . Alors  $\omega_{\text{grad } f}^1 = \omega_F^1$ , donc  $F = \text{grad } f$ .

Si  $\text{div } F = 0$ , alors  $d(\omega_F^2) = 0$ . Encore, d'après le lemme de Poincaré, il existe  $\eta \in \Omega^1(A)$  telle que  $d\eta = \omega_F^2$ . Mais  $\eta = \omega_G^1$  pour un certain champ vectoriel  $G$  (en fait,  $G = \eta_1(e_1)_p + \eta_2(e_2)_p + \eta_3(e_3)_p$ ), alors  $\omega_{\text{rot } G}^2 = d\eta = \omega_F^2$ . Par conséquent,  $F = \text{rot } G$ .

**4-23** On définit  $c(s, t) = ((sR_1 + (1-s)R_2) \cos 2\pi nt, (sR_1 + (1-s)R_2) \sin 2\pi nt)$ . Alors  $c_{(1,0)}(t) = c(0, t) = c_{R_2, n}(t)$ ,  $c_{(1,1)} = c(1, t) = c_{R_1, n}(t)$ , et  $c_{(2,0)}(s) = c_{(2,1)}(s) = (sR_1 + (1-s)R_2, 0)$ . Alors

$$\begin{aligned} \partial c &= -c_{(1,0)} + c_{(1,1)} + c_{(2,0)} - c_{(2,1)} \\ &= -c_{R_2, n} + c_{R_1, n}. \end{aligned}$$

Nous remarquons que  $c([0, 1]^2) \subset \mathbf{R}^2 - \{0\}$ . En effet, si  $c(s, t) = (sR_1 + (1-s)R_2)(\cos 2\pi nt, \sin 2\pi nt) = (0, 0)$ , alors  $sR_1 + (1-s)R_2 = 0$  car  $(\cos 2\pi nt, \sin 2\pi nt) \neq (0, 0)$ . Mais  $sR_1 + (1-s)R_2$  est entre  $R_1$  et  $R_2$ , donc strictement positif, contradiction.

**4-26** Rappelons que  $\theta$  n'est pas définie sur  $\mathbf{R}^2 - \{0\}$  (elle est définie sur  $\mathbf{R}^2 - \{(x, 0) : x \geq 0\}$ ). Donc

$$\begin{aligned} c_{R, n}^*(dx) &= (c_{R, n}^1)'(t)dt = -2\pi nR \sin 2\pi nt dt, \\ c_{R, n}^*(dy) &= (c_{R, n}^2)'(t)dt = 2\pi nR \cos 2\pi nt dt, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} c_{R, n}^*(d\theta) &= (1/R^2)(-R \sin 2\pi nt)(-2\pi nR \sin 2\pi nt dt) \\ &\quad + (1/R^2)(R \cos 2\pi nt)(2\pi nR \cos 2\pi nt dt) = 2\pi n dt. \end{aligned}$$

Donc

$$\int_{c_{R, n}} d\theta = \int_{[0, 1]} c_{R, n}^*(d\theta) = \int_0^1 2\pi n dt = 2\pi n.$$

Or, supposons qu'il existe  $c \in \mathcal{C}_2(\mathbf{R}^2 - \{0\})$  t.q.  $\partial c = c_{R, n}$ . Alors

$$\int_{c_{R, n}} d\theta = \int_{\partial c} d\theta = \int_c d(d\theta).$$

Mais

$$\begin{aligned} d(d\theta) &= \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) \right) dx \wedge dy \\ &= \left( \frac{(x^2 + y^2) - x(2x)}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{(x^2 + y^2) - y(2y)}{(x^2 + y^2)^2} \right) dx \wedge dy \\ &= 0. \end{aligned}$$

Alors  $\int_{c_{R, n}} d\theta = 0$ , contradiction.