MAT 2521 Examen Partiel Corrigé

J. Scott

Partie A

Voir les corrigés des devoirs.

Partie B

1. Soit $n \geq 1$. Posons $P_n = \{0, 1/n, 2/n, \ldots, (n-1)/n, 1\}$. Si $1 \leq j \leq n$, alors $m_{[(j-1)/n, j/n]} = (j-1)/n$ et $M_{[(j-1)/n, j/n]} = j/n$. Donc

$$L(f, P_n) = \sum_{j=1}^{n} \frac{j-1}{n} \left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^{n} j - 1 = \frac{1}{n^2} \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n-1}{2n} = 1/2 - 1/2n$$

et

$$U(f, P_n) = \sum_{j=1}^{n} \frac{j}{n} \left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^{n} j = \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n} = 1/2 + 1/2n.$$

Donc

$$\frac{1}{2} \leq \sup\{L(f, P)\} \leq \inf\{U(f, P)\} \leq \frac{1}{2}.$$

Alors $\sup\{L(f, P)\} = \inf\{U(f, P)\} = 1/2$. Donc $\int_{[0,1]} f = 1/2$.

2. (a) Soit $A = \{(x, y) \in [a, b] \times [a, b] \mid a \leq x \leq y\}$. D'après le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned} \int_{[a,b]\times[a,b]} f \cdot \chi_A &= \int_a^b \int_a^b f(x, y)\chi_A(x, y)\, dx\, dy \\ &= \int_a^b \int_a^y f(x, y)\, dx\, dy \end{aligned}$$

On remarque que $A = \{(x, y) \in [a, b] \times [a, b] \mid x \leq y \leq b\}$. Encore d'après le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned} \int_{[a,b]\times[a,b]} f \cdot \chi_A &= \int_a^b \int_a^b f(x, y)\chi_A(x, y)\, dy\, dx \\ &= \int_a^b \int_x^b f(x, y)\, dy\, dx. \end{aligned}$$

Donc

$$\int_a^b \int_a^y f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \int_x^b f(x, y)\, dy\, dx.$$

(b)

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_x^1 \sqrt{1-y^2}\,dy\,dx &= \int_0^1\int_0^y \sqrt{1-y^2}\,dx\,dy\\ &= \int_0^1 y\sqrt{1-y^2}\,dy\\ &= -\frac{1}{2}\int_{u=1}^{u=0} u^{1/2}\,du\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]_0^1\\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

où l'on a utilisé le changement de variable, $u = 1 - y^2$.

3. (a) $D^2 - g(A) = \{(x, 0) : 0 \leq x \leq 1\}$. Soit $\epsilon > 0$. On pose $U = [0, 1] \times [-\epsilon/3, \epsilon/3]$. Alors $D^2 - g(A) \subseteq U$, et $v(U) < \epsilon$. Donc $D^2 - g(A)$ est de mesure 0.

   (b) Puisque $D^2 - g(A)$ est de mesure 0, $\int_{D^2} f = \int_{g(A)} f$. D'après le théorème de changement de variables,

$$\int_{D_2} f = \int_{g(A)} f = \int_A f \circ g |\det g'|.$$

(On a vu dans le DGD que g est bien injective, et que $\det g' \neq 0$.) Or,

$$g'(r, \theta) = \begin{bmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{bmatrix}$$

alors $\det g' = r$. En utilisant le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}\int_{D_2} f &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{1-r^2}r\,dr\,d\theta\\ &= \int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{2}\right)\int_{u=1}^0 u^{1/2}\,du d\theta\\ &= \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]_0^1 d\theta\\ &= \int_0^{2pi}\frac{1}{3}\,d\theta\\ &= \frac{2\pi}{3}.\end{aligned}$$

Ici, $1 - x^2 - y^2 = 1 - r^2$, et $u = 1 - r^2$.